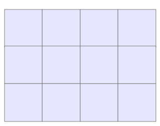
Orígenes del cálculo

Los primeros cálculos de áreas y volúmenes fueron hechos en Babilonia y Egipto, alrededor de 1800 AC. Eran cálculos empíricos y algunos eran solo aproximados, aunque muy buenos para la época, por ejemplo:

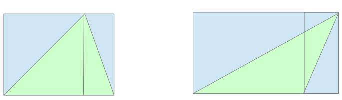
Area de un rectángulo: base x altura
Area de un triángulo: 1/2 base x altura
Diagonal del cuadrado de lado l $d = 30547/21600\ l \approx 1.414213\ l$
Volumen de una pirámide v= 1/3 área base x altura
Circunferencia de un círculo $C \approx 22/7\ d \approx 3.142857\ d \approx 6.285714\ r$
Area de un círculo $A \approx 64/81\ d^2 \approx 0.79012\ d^2 \approx 3.16048\ r^2$

¿De donde habrán sacado estas fórmulas?

La primera puede obtenerse pensando que si se divide a los rectángulos en cuadrados, entonces el número de cuadrados en el rectángulo es el producto de los que caben a lo largo por que caben a lo alto.



La segunda viene de observar que un triángulo ocupa exactamente la mitad del área un rectángulo (hay que lo que puede verse en estos dos dibujos:

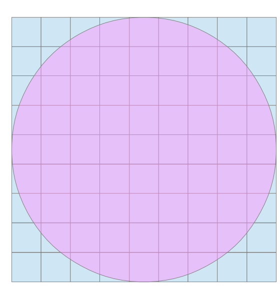


La tercera fórmula no es exacta, pero es una aproximación muy buena. Uno podría dibujar un cuadrado y usar una regla para medir la diagonal, pero nunca obtendría esa precisión. Para obtenerla se puede observar que un cuadrado tiene lado l y diagonal d, entonces tiene área l^2 y puede dividirse en 4 triángulos rectángulos con base d/2 y altura d/2 y por tanto de área $1/2(d/2 \times d/2)= d^2/8$
Así que $l^2= 4xd^2/8 = d^2/2$ y por lo tanto $d^2/l^2= 2$, por lo que d/l es un número cuyo cuadrado es 2. Y ahora podemos usar la aritmética para hallar fracciones cuyo cuadrado se parezca mucho a 2.

$d/l \approx 30547/21600$

$(3/2)^2 = 9/4$ difiere de 2 en 1/4
$(7/5)^2 = 49/25$ difiere de 2 en 1/25
$(10/7)^2 = 100/49$ difiere de 2 en 1/100
$(17/12)^2 = 289/144$ difiere de 2 en 1/144
$(30547/21600)^2 =933119209/466560000$ difiere de 2 en 791/466560000 (menos de 1/500,000)

No se sabe de donde sacaron la fórmula para el área del círculo, aunque la fracción 64/81 sugiere que la del área tiene que ver con esta figura:



Y de la formula para la circunferencia, ni idea...

A los griegos no les interesaban los cálculos aproximados, sino exactos, y querían estar seguros de que lo eran. Para esto usaron *métodos deductivos* y mucho ingenio.

Al tratar de hallar una fracción que diera el valor exacto de la diagonal del cuadrado de lado 1, los discipulos de Pitágoras se llevaron una gran sorpresa, porque descubrieron que no puede existir ninguna fracción así.

Teorema 1. No hay ninguna fracción m/n cuyo cuadrado sea exactamente 2.

Demostración. Supongamos que existen dos enteros m y n tales que $(m/n)^2 = 2$

Podemos suponer que m y n no son ambos pares, ya que si lo fueran podríamos reducir la fracción a otra mas simple.

Como $(m/n)^2 = 2$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $2m^2 = n^2$ y esto dice que n^2 es par, y por lo tanto n es par, es decir, n=2n' para otro entero n'.

Entonces $2m^2 = (2n')^2 = 4n'^2$ y dividiendo entre 2 queda $m^2 = 2n'^2$ y esto dice que m^2 es par y por lo tanto m es par.

Pero entonces m y n son ambos pares, contradiciendo nuestra elección, y esto prueba que m y n no pueden existir. •

Este teorema mostró que deberían existir otros números ademas de los racionales.

Números racionales - cantidades que son cocientes de enteros.
Números irracionales - cantidades que no son cocientes de enteros.
Números reales - todas las cantidades, tanto racionales como irracionales.

La existencia de números irracionales prueba que no todos los rectángulo se pueden dividir exactamente en cuadrados (sin importar de que tamaño los escojamos) lo que pone en duda la validez de las fórmulas para las áreas de rectángulos y triángulos: solo podemos estar seguros que vale cuando la base y la altura pueden dividirse exactamente entre una misma cantidad.

Para hallar fórmulas para los perímetros y áreas de las figuras uno puede preguntarse:

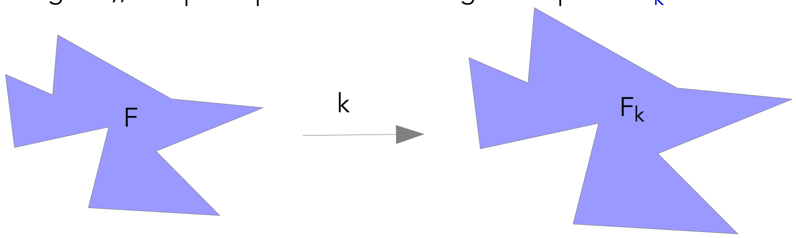
¿Como cambian el perímetro y el área de una figura al cambiar su tamaño?

Si agrandamos a un rectángulo por un factor n (de modo que sea n veces mas largo y n veces mas alto) entonces el rectángulo resultante puede dividirse en n x n rectángulos iguales al original, por lo que su área será n^2 veces mayor. Recíprocamente, al achicamos al rectángulo de modo que largo y alto se reduzcan a la enesima parte, el rectángulo resultante cabrá n^2 veces en el original, por lo que el área será $1/n^2$ de la original.

Así que si un rectángulo se escala (se agranda o achica) por un factor k, donde k es racional, entonces su área debe cambiar por el factor k^2. Esto debería ser cierto para cualquier número real k, sin importar si es racional o no, pero el argumento que teníamos antes no lo demuestra.

Para convencernos de que esto es así hay que observar que todos los números reales pueden aproximarse tanto como queramos por números racionales: dado un número real k y cualquier cantidad $\varepsilon > 0$, existen números racionales s y t de modo que $s < k < t$ y la diferencia entre s y t es menor que ε.
Ahora digamos que R es un rectángulo y que R_e es el rectángulo escalado por un factor e, de modo que R_1=R.
Entonces Area R_s < Area R_k <Area R_t.
Como s y t son racionales sabemos que Area $R_s = s^2$ Area R y Area $R_t = t^2$ Area R
de modo que s^2 Area R < Area $R_k < r^2$ Area R así que s^2 < Area R_k/Area R $<t^2$
Esto dice que Area R_k/Area R esta cerca de k^2, porque s y t son cercanos a k, y como podemos elegir a s y t tan cercanos a k como queramos, debe ocurrir que Area R_k/Area R = k^2.

Al escalar una figura poligonal F por un factor k todas las longitudes deben crecer en la misma escala (por semejanza de triángulos), así que el perímetro de la figura ampliada F_k debe ser k veces el perímetro de F.



¿Y que pasa con el área? Para verlo podemos usar nuevamente aproximaciones: si cubrimos al plano con cuadrados pequeñitos, y nos fijamos en la figura A formada por los cuadrados contenidos en la figura F y en la figura B formada por todos los cuadrados que están contenidos o se enciman a F, entonces

$$\text{área } A < \text{área } F < \text{área } B$$

y si los cuadritos son muy chicos las áreas de A y B deben ser muy parecidas al área de F: dado cualquier $\varepsilon > 0$ podemos elegirlas para que difieren en menos de ε).
Al escalar las figuras queda

$$k^2 \text{ área } A = \text{área } A_k < \text{área } F_k < \text{área } B_k = k^2 \text{ área } B$$

Así que el área de F_k está comprendida entre k^2 veces el área de A y k^2 veces el área de B, que se parecen mucho a k^2 área F ya que difieren en menos de $k^2\varepsilon$.
Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$ es entonces el área de F_k debe ser igual a k^2 área F.

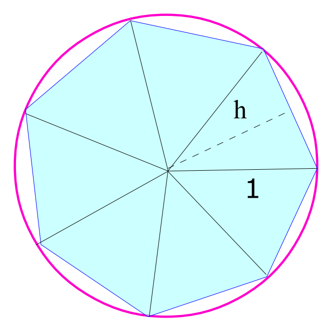
Circunferencia y área del círculo.

Los círculos están determinados por sus radios, su circunferencia y su área deben depender sólo del radio.
Si la circunferencia de un circulo de radio 1 es c y su área es a, entonces al escalar por un factor r para convertirlo en un círculo de radio r su circunferencia debe ser $C=cr$ y su área debe ser $A=ar^2$.
Así que para saber la circunferencia y el área de cualquier circulo basta hallar c y a.

Por definición, el número π es el cociente entre la circunferencia y el diámetro de un círculo, así que $\pi = c/2$ y $c=2\pi$. Usando las ideas de Eudoxo, Arquímedes encontró que $a = c/2 = \pi$:

Teorema (Arquímedes). *El área de un círculo de radio r es igual al área de un triángulo cuya base es la circunferencia y su altura es r.*

Demostración. Consideremos polígonos regulares inscritos en el círculo



El área del polígono es la suma de las áreas de los triángulos. Como el área de un triángulo es igual a la altura multiplicada por la base y dividida entre 2, el área del polígono es la altura h multiplicada por el perímetro (que es la suma de las bases) y dividida entre 2.

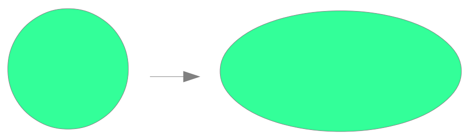
$$A = P \cdot h /2$$

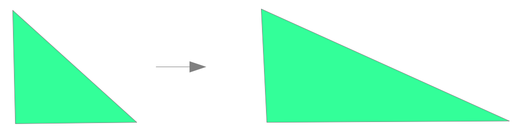
Si tomamos polígonos con mas y mas lados, su área se aproximará cada vez mas al área del círculo y su perímetro se aproximará a la circunferencia C, mientras que h se aproximará al radio r. En el límite, obtenemos que el área del círculo es $A = C \cdot r /2 = 2\pi r \cdot r/2 = \pi r^2$. •

Así que $c=2\pi$ y $a=\pi$ (las fórmulas egipcias usaban $c = 44/7 \approx 6.285714$ y $a = 256/81 \approx 3.16048$)

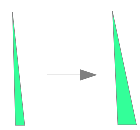
Hay que tener mucho cuidado al generalizar lo que sabemos (o creemos saber) a nuevas situaciones, porque la intuición puede fallar horriblemente.

Ejercicio. Si escalamos cualquier figura estirándola al doble a lo largo y a lo ancho su perímetro se duplica y su área se cuadruplica. ¿Que pasará si sólo la estiramos al doble a lo largo?





Respuesta: El área se duplica, pero el perímetro puede crecer desde muy poco hasta casi duplicarse, dependiendo de la forma y la posición de la figura:



el perímetro crece muy poco

el perímetro casi se duplica

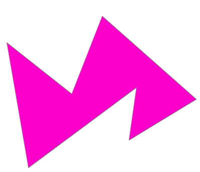
Problemas.

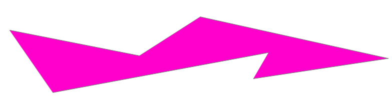
1. Un triángulo tiene lados de longitudes 2, 3 y 4. Estima su área lo mejor que puedas, usando solamente que área = 1/2 base x altura.

2. Un cuadrilátero tiene lados de longitudes 3,4,5 y 6 (en ese orden)
¿Puedes estimar su área a partir estos datos?

3. (sin usar calculadora)
a. Encuentra una fracción cuyo cuadrado difiera de 3 en menos de 1/100
b. Encuentra una fracción que difiera de $\sqrt{3}$ en menos de 1/100 (ojo: son problemas distintos)

4. Una figura plana se estira horizontalmente al doble y se encoge verticalmente a la mitad ¿como cambia su área? ¿y su perímetro? Da las respuestas mas exactas posibles sin suponer nada sobre la forma de la figura.





5.* ¿Existirá una figura que tenga perímetro 4 y área 2? ¿Y una que tenga perímetro 2 y área 1?

(los ejercicios marcados con * son mas difíciles)

El cálculo estudia las relaciones entre cantidades que varían continuamente, como la relación entre el radio, la circunferencia y el área de un círculo,

Para hallarlas se puede usar la experimentación, la intuición y la imaginación, pero creer que algo es cierto no lo hace cierto, y por mas experimentos que concuerden con lo que esperamos puede haber otro que lo desmienta. En matemáticas, para estar seguros que algo es cierto necesitamos comprobarlo (demostrarlo) usando argumentos lógicos.

Todas estas cantidades y relaciones se expresan por medio de números, y para estudiarlas necesitamos saber usar los números muy bien, asi que por ahi empezaremos.

El calculo infinitesimal

El calculo infinitesimal fue desarrollado en el siglo XVII para estudiar el movimiento y el cambio. Fue el trabajo de muchos matemáticos, como Fermat, Descartes, Huygens, Newton y Leibnitz, quienes lo usaron para entender el movimiento de los planetas y las trayectorias de los proyectiles, para calcular longitudes de curvas y sus tangentes y para hallar áreas y volúmenes de figuras curvas.
Durante el siglo Bernulli, Euler, Taylor, Lagrange lograron muchos mas avances que usaron para resolver otros problemas en resolver problemas de optimización.

El calculo es distinto de otras disciplinas matemáticas (como el álgebra y la geometría) en que trata con cantidades variables y para hacerlo con exactitud requiere considerar limites de cantidades que se vuelven infinitamente pequeñas o grandes. Estas ideas fueron bien entendidas hasta el siglo XIX gracias a Bolzano, Cauchy y Weierstrass